Teorema Sia $T : V \to W$ applicazione lineare. Allora

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Imm} T = \dim V$$

Dim

CASO A

Se $\operatorname{Ker} T = \{0\}$

$v_1, , v_n$ base di V

$$\operatorname{Imm} T = \langle T v_1, \; , T v_n \rangle$$

DIMOSTRIAMO $\subseteq$

Ricordo che $\forall\, v \in V$ vale.

$$v = \lambda_1 v_1 + \quad + \lambda_n v_n$$

Allora $T v = \lambda_1 T v_1 + \quad + \lambda_n T v_n$

dunque $T v \in \langle T v_1, \; , T v_n \rangle$

DIMOSTRIAMO $\supseteq$

Considero $a_1 T v_1 + \quad + a_n T v_n$

che è $= T(a_1 v_1 + \quad + a_n v_n)$ cioè $\in \operatorname{Im} T$

Resta da dim che

$$\dim \langle T v_1, \quad , T v_n \rangle = n$$

Basta dimostrare che

$T v_1, \quad , T v_n$ sono LIN INDIP

Considero

$$b_1 T v_1 + \quad + b_n T v_n = 0$$

devo dimostrare che $b_1 = b_2 = \quad = b_n = 0$

Ora $b_1 T v_1 + \quad + b_n T v_n =$

$$= T(b_1 v_1 + \quad + b_n v_n)$$

In sostanza

$$T(\underbrace{b_1 v_1 + \quad + b_n v_n}) = 0$$

cioè $b_1 v_1 + \quad + b_n v_n \in \operatorname{Ker} T$

Poichè $\operatorname{Ker} T = \{0\}$,

$$b_1 v_1 + \quad + b_n v_n = 0$$

Ma $v_1, \quad , v_n$ è una base,

allora $b_1 = b_2 = \quad = b_n = 0$.

CASO B Se $\operatorname{Ker} T = V$

Allora $\operatorname{Imm} T = \{0\}$

la formula desiderata è allora banalmente vera

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$$
$$\underset{V}{\parallel} \qquad\qquad \underset{\{0\}}{\parallel}$$

CASO C

Sia $\dim \operatorname{Ker} T = k$ con

$$0 < k < n$$

Sia $z_1, , z_k$ base di $\operatorname{Ker} T$

La completo ad una base di V

$$z_1, \ , z_k, w_1, \ , w_{n-k}$$

$\mathrm{Imm}\,T = \langle T z_1, T z_2, , , T w_1, , , T w_{n-k} \rangle$

$$= \langle T w_1, \quad , T w_{n-k} \rangle$$

Se dimostro che $T w_1, , , T w_{n-k}$ sono LIN INDIP ho finito

Scrivo

$$(*) \quad b_1 T w_1 + \quad + b_{n-k} T w_{n-k} = 0$$

devo dim che $b_1 = b_2 = \quad = b_{n-k} = 0$

L'equazione $(*)$ equivale

$$T(b_1 w_1 + \quad + b_{n-k} w_{n-k}) = 0$$

Dunque $b_1 w_1 + \quad + b_{n-k} w_{n-k}$ è in Ker T.

Allora

$$b_1 w_1 + \quad + b_{n-k} w_{n-k} = c_1 z_1 + \quad + c_k z_k$$

$$-c_1 z_1 - c_2 z_2 \quad - c_k z_k + b_1 w_1 + \quad + b_{n-k} w_{n-k} = 0$$

Poiché $z_1, z_2, \quad, z_k, w_1, \quad, w_{n-k}$ è una base di V segue che

$$c_1 = c_2 = \quad = c_k = \boxed{b_1 = b_2 = \quad = b_{n-k} = 0}$$

$\square$

Teorema $T: V \to W$ lineare

è INIETTIVA se e solo se $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$

Dim

se T non è iniettiva esistono

v_1 e $v_2 \in V$ con $v_1 \neq v_2$ t.c.

$$T v_1 = T v_2$$

Allora

$$T(v_1 - v_2) = T v_1 - T v_2 = 0$$

cioè $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}\, T$

che dunque non è $= \{0\}$

se T è iniettiva chi è $\operatorname{Ker} T$?

$$0 \in \operatorname{Ker} T \text{ perché}$$

$$T(0) = 0$$

Nessun altro vettore v può dare

$$Tv = 0 \quad \text{perché } T \text{ è iniettiva}$$

infatti

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & \\ & 0 \\ v \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

non può accadere

Dunque $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ $\square$

__Esercizio__ Dimostrare che se $n > m$ non esiste una applicazione lineare iniettiva $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e non esiste una applicazione lineare surgettiva $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Esercizio "TIPO"

Dati in $\mathbb{R}^5$ i seguenti 3 vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia W lo spazio da loro

generato.

Il vettore $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} \in W$?

Svolgimento

$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} \in W$ se e solo se

esistono $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\-4\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\\-3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Trovare x_1, x_2, x_3 equivale a

risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Creo la matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

continuate ..... e scoprirete che il sistema non ha soluzioni.